Cálculo Numérico – Versão Atualizada

**(Professor Heleno Cardoso)**

3.0. Zero de Funções

Vamos conhecer os métodos numéricos necessários para calcular funções não lineares. Antes entendendo o que é zero da função. Valor de x que faz f(x) ser zero. f(x)=0.

Zero da função

**- Calcular analiticamente, de forma simples:**

**1. 1º Grau – Função afim (reta) (tipo especial Função Linear, a <> 0, b=0).**

f(x) = ax + b => 0 = ax + b => x = -b/a (Zero da função)

**2. 2º Grau (Parábola) – Função não linear**

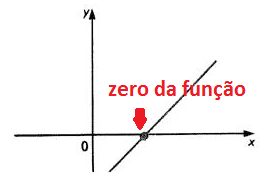
f(x) = ax2 + bx + c => 0 = ax2 + bx + c; Fórmula de Bhaskara.

∆ = b2 – 4\*a\*c; ; Soma=(-b/a) e Produto=(c/a); Delta (> 0 [duas raízes reais e distintas], = 0 [uma única raiz real], < 0 [nenhuma raiz real] );

**3. Calcular utilizando Métodos Numéricos**

Na medida em que a complexidade aumenta nas soluções analíticas, faz-se necessário o uso de métodos numéricos.

Vamos utilizar a propriedade da **determinação do Intervalo em que o Zero Pertence:**



**[a ; b]**

f(x)

f(b)

f(a)

b

a

Se f(a) \* f(b) < 0, então vai existir um zero da função no intervalo **[a ; b]**. Zero de funções não lineares e reais. **(Teorema de Bolzano).**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -∞ | -99 | -13 | -7 | -5 | -1 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| f(x) | - | - | - | - | + | + | + | - | - | + | + | + |

**f(a) \* f(b) < 0 => xo ϵ [a ; b]**

**-+**

**+-**

**4. Método Numérico da Bissecção**

Recorremos aos métodos numéricos, quando se torna inviável calcular, os zeros de função reais não lineares, de função polinomial com grau muito elevado através de soluções, equações matemáticas muito complexas inerentes ao método, ou seja, através de métodos analíticos.

Este método numérico da bissecção pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares quando a raiz **x = xo** está no **intervalo de [a ; b].**

A raiz da função não linear pode ser estimada pela média aritmética do intervalo **xk =** , em que a tolerância (**restrição)** de **|f(xk)|< ε, ou |b – a| < ε**.

Onde **Xk**, é a estimativa do zero da função não linear. Lembrando a regra: **f(a) \* f(b) < 0**.

Exemplo:

**-**

**+**

f(x)= x2+ln(x); Intervalo: [0.5; 1]; **restrição: | f(x) | < 0.05**

**Passo 1, verificando se f(a) \* f(b) < 0.**

f(a) = f(0.5) = 0.25 + (– 0.69314718) => f(a) = -0.44314718 => **f(a)=-0.44**;

f(b) = f(1) = 1 + 0 => **f(b) = 1**;

f(a) \* f(b) < 0, **verdadeiro**.

**Passo 2, para k=1, calculando xk e f(xk) e verificando se atende a restrição.**

= (0.5 + 1) / 2 => **x1= 0.75**

f(x1) = f(0.75)= 0.5625 + (-0.287682072) => f(0.75) = 0.274817927 => **f(0.75) = 0.27**.

f(x1) = |0.27 |< 0.05, **não atende a tolerância**.

**Passo 3, para k=2, calculando xk e f(xk) e verificando se atende a restrição.**

**Definindo novo intervalo: Como o f(x2) > 0, então, [0.5; 0.75]**

= (0.5 + 0.75) / 2 => **x2= 0.625**

f(x2) = f(0.625)= 0.390625+ (-0.470003629) => f(0.625) = -0.079378629 => **f(0.625) = -0.079**.

f(x2) = |-0.079| < 0.05, **não atende a tolerância**.

**Passo 4, para k=3, calculando xk e f(xk) e verificando se atende a restrição.**

**Definindo novo intervalo: Como o f(x3) < 0, então, [ 0.625;0.75]**

= (0.625 + 0.75) / 2 => **X3= 0.6875**

f(x3) = f(0.6875)= 0.47265625 + (-0.3746934) => f(0.6875) = 0.09796285 => **f(0.6875) = 0.098**.

f(x3) = |0.098| < 0.05, **não atende a tolerância**.

**Passo 5, para k=4, calculando xk e f(xk) e verificando se atende a restrição.**

**Definindo novo intervalo: Como o f(x4) > 0, então, [0.625; 0.6875]**

= (0.625 + 0.6875) / 2 => **X4= 0.65625**

f(x4) = f(0.6563)= 0.43072969 + (-0.421137277) => f(0.6563) = 0.0095924 => **f(0.6563) = 0.0095**.

f(x4) = |0.01| < 0.05, **ATENDE a tolerância**.

**Logo, a raiz estimada da função não linear é igual a x4= 0.65625.**

f(x)= x2+ln(x); Intervalo: [0.5; 1]; **condição de parada: | f(x) | < 0.05**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **K** | **ak** | **bk** | **Xk** | **f(Xk)** | **|f(Xk)|<0.05** |
| 1 | 0.5 | 1 | 0.75 | 0.27 | Falso |
| 2 | 0.5 | 0.75 | 0.625 | -0.079 | Falso |
| 3 | 0.625 | 0.75 | 0.6875 | 0.098 | Falso |
| 4 | 0.625 | 0.6875 | **0.65625** | **0.0095** | **Verdade** |

Exercício: a) ; Restrição: | f(x) | < 0.02; intervalo [4; 4.3]

**Definindo a função:**

; Intervalo: [4; 4.3]; **condição de parada: |f(x)| < 0.02**

**Como f(x)=0, logo**

**Passo 1, verificando se f(a) \* f(b) < 0.**

f(a) = f(4) = 4 – 4.123105625 => f(a) = -0.123105625 => **f(a)= -0.123**;

f(b) = f(4.3) = 4.3 – 4.123105625 => f(b) = 0.176894375=> **f(b)=0.177**;

f(a) \* f(b) < 0, **verdadeiro**.

**Passo 2, para k=1, calculando xk e f(xk) e verificando se atende a restrição. Intervalo [4;4.3].**

= (4 + 4.3) / 2 => **x1= 4.15**

f(x1) = f(4.15)= 4.15 - 4.123105625 => f(4.15) = 0.026894375 => **f(4.15) = 0.027**.

f(x1) = |0.027 |< 0.02, **não atende a tolerância**.

**Passo 3, para k=2, calculando xk e f(xk) e verificando se atende a restrição. Redefinindo o intervalo [4;4.15].**

= (4 + 4.15) / 2 => **x1= 4.075**

f(x1) = f(4.075)= 4.075 - 4.123105625 => f(4.075) = -0.048105625 => **f(4.075) = -0.048**.

f(x1) = |-0.048 |< 0.02, **não atende a tolerância**.

**Passo 2, para k=3, calculando xk e f(xk) e verificando se atende a restrição. Redefinindo o intervalo [4.075;4.15].**

= (4.075 + 4.15) / 2 => **x1= 4.1125**

f(x1) = f(4.1125)= 4.1125 - 4.123105625 => f(4.1125) = -0.010605625 => **f(4.1125) = -0.01**.

f(x1) = |-0.01 |< 0.02, **ATENDE a tolerância**.

**Resposta: f(X1) = -0.01. Logo, |f(X1| < 0.02 e X1 = 4,1125, é a raiz estimada da função não linear.**

; Intervalo: [4; 4.3]; **condição de parada: | f(x) | < 0.02**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **K** | **ak** | **bk** | **Xk** | **f(Xk)** | **|f(Xk)|<0.02** |
| 1 | 4 | 4.3 | 4.15 | 0.027 | Falso |
| 2 | 4 | 4.15 | 4.075 | -0.048 | Falso |
| 3 | 4.075 | 4.15 | **4.1125** | **-0.01** | **Verdade** |

**5. Método Numérico da Falsa Posição**

Este método numérico da falsa posição pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares.

**-**

**+**

Então, dado o **intervalo de [a ; b],** a raiz aproximada da função não linear pode ser estimada por , em que a tolerância (**restrição)** de **|f(xk)|< ε, ou |b – a| < ε**.

Onde **Xk**, é a estimativa do zero da função não linear. Lembrando a regra: **f(a) \* f(b) < 0**.

Exemplo:

f(x)= x2+ln(x); Intervalo: [0.5; 1]; **restrição: | f(x) | < 0.05**

**Passo 1, verificando se f(a) \* f(b) < 0.**

f(a) = f(0.5) = 0.25 + (– 0.69314718) => f(a) = -0.44314718 => **f(a)=-0.443**;

f(b) = f(1) = 1 + 0 => **f(b) = 1**;

f(a) \* f(b) < 0, **verdadeiro**.

**Passo 2, para k=1, calculando xk e f(xk) e verificando se atende a restrição.**

**f(a)** => **f(a)=-0.443**;

**f(b)** => **f(b) = 1**;

=> => =>

**X1= 0.6535**

f(X1)=f(0.6535)= 0.65352 + ln(0.6535) => **f(0.6535) = 0.0016**.

f(X1) = | f(0.6535) | < 0.05, **atende a tolerância**.

**Fazendo mais um passo, para k=2, calculando xk e f(xk) verificando que também atende a restrição.**

**Definindo novo intervalo: Como o f(x1) > 0, então, [0.5; 0.6535]**

**f(a) =** f(0.5) = 0.25 + (– 0.69314718) => f(a) = -0.44314718 => **f(a)=-0.443**;

**f(b)=** f(0.6535) = 0.42706225 + (– 0.425412745) => f(a) = 0.001649504 => **f(b)=0.0016**;

=> => =>

**X2= 0.6529**

f(X2)=f(0.6529)= 0.65292 + ln(0.6529) => **f(0.6529) = 0.0000529**.

f(X2) = | f(0.0000529) | < 0.05, **ATENDE a tolerância**.

**Logo, a raiz estimada da função não linear é igual a x2= 0.6529.**

f(x)= x2+ln(x); Intervalo: [0.5; 1]; **condição de parada: | f(x) | < 0.05**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **K** | **ak** | **bk** | **Xk** | **f(Xk)** | **|f(Xk)|<0.05** |
| 1 | 0.5 | 1 | **0.6535** | **0.0016** | **Verdade** |
| 2 | 0.5 | 0.6535 | 0.6529 | -0.0000529 | **Verdade** |

Exercício:

1. ; Intervalo: [4; 4.3]; **condição de parada: | f(x) | < 0.02**

**Passo 1, verificando se f(a) \* f(b) < 0.**

f(a) = f(4) = 4 – 4.123105625 => f(a) = -0.123105625 => **f(a)= -0.123**;

f(b) = f(4.3) = 4.3 – 4.123105625 => f(b) = 0.176894375=> **f(b)=0.177**;

f(a) \* f(b) < 0, **verdadeiro**.

**Passo 2, para k=1, calculando xk e f(xk) e verificando se atende a restrição. Intervalo [4;4.3].**

**f(a)** => **f(a)=-0.123**;

**f(b)** => **f(b) = 0.177**;

=> => =>

**X1= 4.123**

f(X1)=f(4.123)= 4.123 – 4.123105625 => **f(4.123) = -0.000105625**.

f(X1) = | f(4.123) | < 0.05, **não atende a tolerância**.

; Intervalo: [4; 4.3]; **condição de parada: |f(x)| < 0.02**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **K** | **ak** | **bk** | **Xk** | **f(Xk)** | **|f(Xk)|<0.02** |
| 1 | 4 | 4.3 | **4.123** | **-0.00010563** | **Verdade** |

**Resposta:**

f(X1) = | f(-0.00010563) | < 0.02, **ATENDE a tolerância**.

**Logo, a raiz estimada da função não linear é igual a x1= 4.123.**

**6. Método Numérico do Ponto Fixo**

Este método numérico iterativo, ponto fixo, pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares.

A partir da expressão f(x) = 0, podemos determinar a expressão **x = g(x)**, que é a função de iteração que será utilizada para calcular o valor de x. Para tanto, temos: **Xk+1= g(Xk).** Sendo Xk+1, a estimativa da raiz da função não linear atual e g(Xk), a estimativa da raiz da função não linear anterior. Na qual, a estimativa da raiz atual depende da estimativa da raiz anterior.

Para calcular a raiz aproximada da função não linear no método ponto fixo, precisamos de uma estimativa de raiz inicial X0.

Onde **Xk**, é a estimativa do zero da função não linear. Lembrando a regra: **f(a) \* f(b) < 0**.

Exercício:

f(x) = X3 – X – 1; **Condição de Parada:** Fazer até a repetição das 04 primeiras casas decimais; para **X0 = 1; e intervalo [1;2]**

**Passo 1, verificando se f(a) \* f(b) < 0.**

Então, f(x)=0; x = g(x); Xk+1=g(Xk)

f(a) = f(1) = 13 – 1 – 1=> **f(1) = -1**;

f(b) = f(2) = 23 – 2 – 1 => **f(2) = 5**;

f(a) \* f(b) < 0, **verdadeiro**.

**Passo 2, definindo a função x = g(x).**

f(x) = X3 – X – 1 => 0 = X3 – X – 1 => -X3 = – X – 1 => X3 = X + 1 => , portanto: g(X) = .

Logo,

**Passo 3, calculando os valores de Xk em função de g(Xk) e verificando se atende a condição.**

**Para k=0, temos:**

=> X1 = 1,25992105

**Para k=1, temos:**

=> X2 = 1,312293837

**Para k=4, temos:**

=> X5 = 1,324632625

**Para k=5, temos:**

=> X6 = **1,3247**01749

**Para k=6, temos:**

=> X7 = **1,3247**14878

**Para k=2, temos:**

=> X3 = 1,322353819

**Para k=3, temos:**

=> X4 = 1,324268745

Logo, a raiz estimada da função não linear é igual a **1,3247,** existiu uma convergência para a raiz.

=; **Condição de Parada:** Fazer até a repetição das 04 primeiras casas decimais; **X0 = 1; [1;2]**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **K** | **Xk+1** | **Repetição 4a casa decimal** |
| 0 | 1.25992105 | Falso |
| 1 | 1.312293837 | Falso |
| 2 | 1.322353819 | Falso |
| 3 | 1.324268745 | Falso |
| 4 | 1.324632625 | Falso |
| 5 | 1.324701749 | Falso |
| 6 | **1.324714878** | **Verdade (Convergência)** |

**6.1. Método Numérico do Ponto Fixo: Convergência e Divergência**

**Escolhendo outra função g(x),** f(x) = X3 – X – 1; **Condição de Parada:** Fazer até a repetição das 04 primeiras casas decimais; **X0 = 1; [1;2]**

**Passo 1, verificando se f(a) \* f(b) < 0.**

Então, f(x)=0; x = g(x); Xk+1=g(Xk)

f(a) = f(1) = 13 – 1 – 1=> **f(1) = -1**;

f(b) = f(2) = 23 – 2 – 1 => **f(2) = 5**;

f(a) \* f(b) < 0, **verdadeiro**.

**Passo 2, definindo a função x = g(x).**

f(x) = X3 – X – 1 => 0 = X3 – X – 1 => X = X3 – 1, **então:**

**Passo 3, calculando os valores de Xk+1 em função Xk+1 = g(Xk).**

**Para k=3, temos:**

=> X4= -9

**Para k=4, temos:**

=> X5= -730

**Para k=5, temos:**

=> X6= -389017001=> X6=-3.89 x 108

**Para k=0, temos:**

=> X1= 0

**Para k=1, temos:**

=> X2= -1

**Para k=2, temos:**

=> X3= -2

Nesta solução ocorreu uma divergência para o valor da raiz estimada da função não linear, portanto, não é possível encontrar o valor da raiz estimada.

; **Condição de Parada:** Fazer até a repetição das 04 primeiras casas decimais; **X0 = 1; [1;2]**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **K** | **Xk+1** | **Repetição 4a casa decimal** |
| 0 | 0 | Falso |
| 1 | -1 | Falso |
| 2 | -2 | Falso |
| 3 | -9 | Falso |
| 4 | -730 | Falso |
| 5 | **-3.89 x 108** | **Falso (Divergência)** |

**7. Método Numérico da Newton-Raphson**

Este método numérico iterativo, Newton-Raphson, pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares.

Dada à expressão f(x) = 0 e a estimativa inicial X0, podemos calcular a raiz real estimada da função não linear, de acordo com a estimativa atual (Xk+1) e a estimativa anterior (Xk), a partir da expressão .

Este é o método no qual a estimativa atual depende da estimativa anterior, além disso, o método depende do **valor da função f no ponto Xk da estimativa anterior** e também do **valor da derivada da função f** **no ponto Xk da estimativa anterior**.

Para calcular a raiz real aproximada da função não linear através do método de Newton-Raphson, iremos precisar de uma estimativa inicial para X0.

Onde **Xk**, é a estimativa do zero da função não linear. Lembrando a regra: **f(a) \* f(b) < 0**.

Exemplo: Dado X0 = 1 e f(x) = X3 – X -1 e **Condição de Parada:** Fazer até a repetição das 04 primeiras casas decimais.

**Passo 1, calculando a derivada da função f’(x).**

f'(x) = 3x2 – 1 (derivada da função)

**Passo 2, calculando a raiz real estimada da função não linear.**

**Para k = 0 (primeira iteração), temos:**

=> => X1 = 1.5

**Passo 3, calculando a raiz real estimada da função não linear.**

**Para k = 1 (segunda iteração), temos:**

=>

**Passo 4, calculando a raiz real estimada da função não linear.**

**Para k = 2 (terceira iteração), temos:**

=>

**Passo 5, calculando a raiz real estimada da função não linear.**

**Para k = 3 (quarta iteração), temos:**

=>

**Passo 6, calculando a raiz real estimada da função não linear.**

**Para k = 4 (quinta iteração), temos:**

=>

Logo, a raiz estimada da função não linear é igual a **1,3247,** existindo uma convergência para a raiz.

Este procedimento pelo método de Newton-Raphson foi mais rápido do que pelo método de Ponto Fixo, no qual obtivemos o mesmo resultado na sétima iteração do procedimento.

; X0 = 1 ; **Condição de Parada:** Fazer até a repetição das 04 primeiras casas decimais.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **K** | **Xk+1** | **Repetição 4a casa decimal** |
| 0 | 1.5 | Falso |
| 1 | 1.347826087 | Falso |
| 2 | 1.325200399 | Falso |
| 3 | 1.324718174 | Falso |
| 4 | **1.324717957** | **Verdade** |

Exercício:

1. Dado: =d; d = 10cm; t0 = 4s; e |f(t)| < 0.002 (critério de parada), qual o t = ? Adotar: **π = 3,1415**

Nota: Argumento em radianos



; **Logo,**

**Passo 1, definindo a função f’(x).**

=d; d = 10cm; t0 = 4s; **π = 3,1415**

=10 => =0; como f(x)=0=> f(t)=0; Logo a função é: **f(t) =**

**Passo 2, calculando a derivada da função f’(x).**

**f'(t) = -** (**derivada da função**)

**Passo 3, calculando to=4s a raiz real estimada da função não linear.**

**Para k = 0 (primeira iteração), temos:**

**f(t1) = => => f(t1) = 24,99037**

**f'(t1) = -=> - => f'(t1) = 81,61274**

; t0 = 4s; => => **t1 = 3,693793**

f(t1) => f(3,693793)= => **f(3,693793) = 2,72**; |f(t1)|<0.002

**Para k = 1 (segunda iteração), t1=3,693793 e π = 3,1415, temos:**

**f(t2) = => => f(t2)=2,720123**

**f'(t2) = -=> - => f'(t2) = 62,59761**

; =>

t2 = 3,693793 - 0,043454 => **t2 = 3,650339**

f(t2) => f(3,650339)= => **f(3,650339) = 0,070587**;

**Para k = 2 (terceira iteração), t2=3,650339 e π = 3,1415, temos:**

**f(t3) = => => f(t3)=0,070587**

**f'(t3) = -=> - => f'(t3) = 59,32804**

; =>

t3 = 3,650339 - 0,00119 => **t3 = 3,649149**

f(t3) => f(3,649149)= => **f(3,649149) =**;

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **K** | **tk+1** | **f(tk)** | **|f(t)| < 0.002** |
| 0 | 3.693793 | 2.72 | Falso |
| 1 | 3.650339 | 0.07 | Falso |
| 2 | **3.649149** | **4,08426E-05** | **Verdade** |

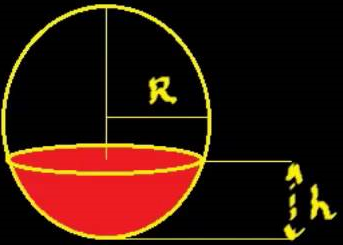
**8. Método Numérico da Secante**

Este método numérico iterativo, Secante, pode ser adotado para calcular o zero de funções reais não lineares.

Dada duas raízes reais com estimativas iniciais: X0 e X1 e à expressão f(x) = 0, podemos calcular a raiz real estimada da função não linear, de acordo com a estimativa atual (Xk+1) e as duas estimativas anteriores (Xk e Xk-1), a partir da expressão , sendo que, a estimativa atual depende das duas estimativas anteriores.

Onde **Xk**, é a estimativa do zero da função não linear. Lembrando a regra: **f(a) \* f(b) < 0**.

Exercício: Dado R = 1; v = 0.5, ho = 0.25e h1 = 0.5 e |f( h )|< 0.002, qual o valor de h =? Adotar: **π = 3,1415**



Solução: f(x) = 0 => f(h) = 0;

**Passo 1, encontrando a função não linear.**

=> , como f(h) = 0.

f(h) =

**Passo 2, calculando as raízes da função não linear, h0 e h1.**

Dados: h0=0.25 e h1=0.5

f(0) =

**Para f(0.25) = -0,3200 e Para f(0.5) = 0.1545**

**f(h0) = -0.3200 e f(h1) = 0.1545**

**Passo 3, calculando a raiz real estimada da função não linear, h0 e h1.**

Para k = 2, qual o valor de h2=?

h2= 0.25 \* 0.1545 – 0.5 \* [-0,32] / ( 0.1545 – [-0.32] )

**h2 = 0.4186 e f(h2) = -0.0263; |f(h2)| < 0.002, não atende a restrição.**

**Passo 4, calculando a raiz real estimada da função não linear, h1 e h2.**

h3= 0.5 \* [-0.0263] – 0.4186 \* [0,1545] / ( -0.0263 – 0.1545] )

Logo, a raiz estimada da função não linear é:

**h3 = 0.4304 e f(h3) = -0.0015; |f(h3)| < 0.002, ATENDE a restrição.**

; **Condição de Parada |f( hk )|< 0.002**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **K** | **hk-1** | **hk** | **f(hk)** | **f(hk-1)** | **hk+1** | **|f( h )|< 0.002** |
| 1 | 0.25 | 0.5 | 0.1545 | -0.3200 | 0.4186 | Falso |
| 2 | 0.5 | 0.4186 | -0.0263 | 0.1545 | 0.4304 | Falso |
| 3 | 0.4186 | **0.4304** | **-0.0015** |  |  | **Verdade** |